問題集(結び目の変形に関する研究)

AUTHOR(S):

宮崎, 桂

CITATION:

宮崎, 桂. 問題集(結び目の変形に関する研究). 数理解析研究所講究録
1992, 813: 155-168

ISSUE DATE:

1992-11

URL:

http://hdl.handle.net/2433/83047

数理解析研究所講究録
第 813 巻 1992 年 155-168

問題集

(編) 津田塾大　宮崎 桂 (Katura Miyazaki)

§1 Twisting

§2 Unknotting operation

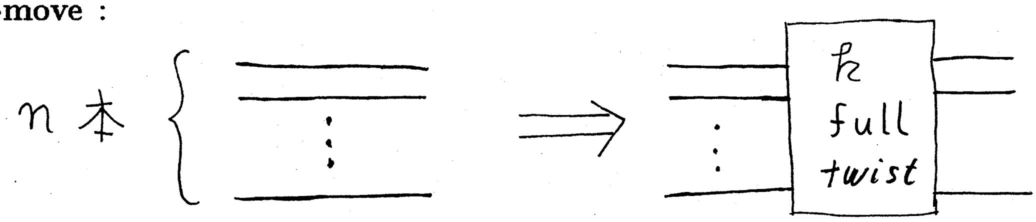
§3 4 次元多様体，S^4 内の曲面

§4 3 次元多様体，結び目

§5 その他

ここでよく使われる，結び目の local move.

(n,k)**-move** :



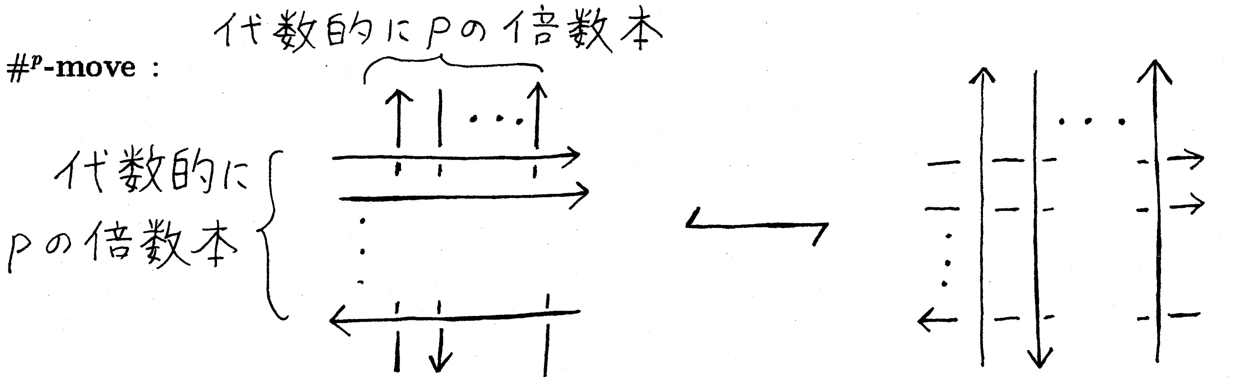
結び目 K が結び目 K' に (n,k)-move 1 回で移るとき $K \xrightarrow{(n,k)} K'$ と書く.

結び目 K に対しどんな $k, n \in Z$ をとっても

$$K \xrightarrow{(n,k)} 0,\ \text{a trivial knot}$$

と書けないとき，K は twisting でほどけないという.

$\#^p$**-move** :



self-#(I)-move : 絡み目の同じ成分どうしで #-unknotting operation を行う絡み目の local move.

T(p,q) は (p,q) トーラス結び目を表す.

1 Twisting

1.1. （大山）

結び目 K と L が次の列で結ばれるとき $K \sim L$ と書く．

$$K \cong K_1 \xrightarrow{(n_1,2)} K_2 \xrightarrow{(n_2,2)} \cdots \xrightarrow{(n_m,2)} K_{m+1} \cong L \quad 各\ n_i\ は奇数$$

$\mathcal{K}$ で結び目全体を表すとき，同値類の個数 $\#(\mathcal{K}/\sim)$ は無限か？

その後の発展．答は Yes.（横田，宮崎）

n が奇数で k が偶数のとき，(n,k)-move は結び目の determinant を変えない．

よって $\#^m T(2,3)$ と $\#^\ell T(2,3)$ は $m \neq \ell$ のとき同値ではない．なお，上の事実は横田による Jones 多項式の twisting formula を用いても, Goeritz matrix を調べても示せる．

1.2. （大山）

事実．全ての結び目 K は適当な $n \in Z$ をとると $K \xrightarrow{(n,1)} K' \xrightarrow{(n-1,-1)} 0$ という列を持つ．

問題．任意の結び目 K に対し, 適当な m, n と適当な K' を選ぶと次の列が成立するか？

$K \xrightarrow{(m,\pm 1)} K' \xrightarrow{(n,\pm 1)} 0$　　複号同順でなくても良い．

注意　1. m と n が互いに素ではない，という条件をつけると上のような列を持たない K をみいだせる．

2. $4_1 \xrightarrow{(m,1)} K' \xrightarrow{(n,-1)} 0$ となる奇数 m, n は存在しない．

1.3.

(a) （大山） 軟派 knot は存在するか？

K: 軟派 knot $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 結び目 K は twisting でほどけないが，ある結び目 K' との連結和 $K\#K'$ は twisting でほどくことができる．

注意． 2-bridge knot K で， twisting でほどけないものがあれば， K は軟派 knot.

($K' = -K$! とすればよい．)

(b) （中西） 硬派 knot は存在するか？

K: 硬派 knot $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 結び目 K は twisting でほどけず，どんな結び目 K' との連結和 $K\#K'$ もやはりほどけない．

twisting でほどけない結び目の例.

- $T(2,75)\#k$ ここで k は任意の slice knot（安原）
- $T(2,45)\#k'$ ここで k' はアレクサンダー多項式が 1 の slice knot（宮崎）
- $K_m = \partial(S_1 \natural_b S_2)$ はほどけない（宮崎）

  ただし，S_1, S_2 は各々 $T(2,3), T(2,4m-1)$ の Seifert surface で球面で分離されている．b は S_1 と S_2 を結ぶ band で $\mathrm{int} b \cap S_i = \emptyset$ となるもの．$\natural_b$ は band b を介した境界連結和．m の条件は，$m \equiv 1 \bmod 3, m > 1, 2m+1$ は平方数でない．たいていの band に対し K_m は prime knot.
- 次の 3 条件を満たす結び目 K, 例えば 3 個以上奇数個の figure eight knot の連結和 (安原)

  (1) 全ての p について $\sigma_p(K) = 0$, (2) Arf(K)=1, (3) $\mathrm{H}_1(X)$ の生成元の最小数が 3 以上．ただし σ_p は Tristram の p-signature, X はS^3 の K にそった 2-fold branched covering を表す．

1.4(a). （寺垣内）

K_1, K_2 をともに satellite knot とすると $K_1\#K_2$ を twisting でほどくことができるか？

事実 1. 一方が satellite knot のときは，ほどける結び目の例がある．

2. (torus knot)#(prime knot) あるいは (2-bridge knot)#(prime knot) のタイプではほどける例が無限にある．ほどけることがわかっている結び目の例はこれらのタイプのみ．

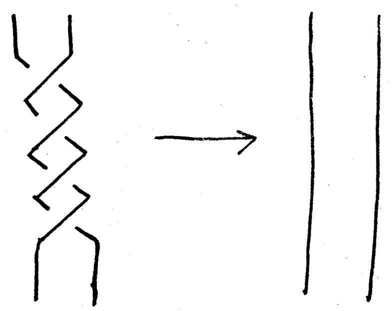
(b) （中西）

(a) の条件をゆるめて，$\exists K_1, \exists K_2$ を 2-bridge knot でも torus knot でもないとする．このとき $K_1\#K_2$ は twisting でほどけるか？

(c) （寺垣内，茂手木）

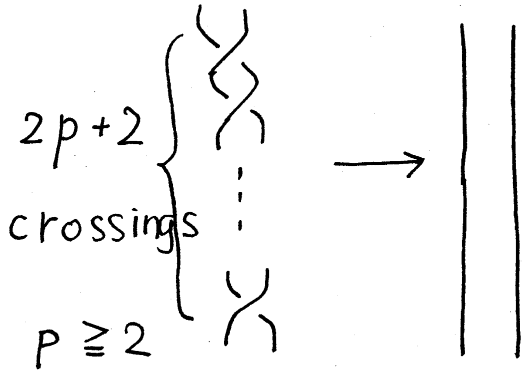
結び目 $K_1\#\cdots\#K_n$ (K_i prime knot, $n \geq 3$) で twisting でほどけるものはあるか？

注意.



によって（1回），ほどける結び目 k は

$k\#T(2,-3)$ が twisting 1回でほどける.



によって（1回），ほどける結び目 k は

$k\#T(p,p+1)$ が twisting 1回でほどける.

1.5. （茂手木） Unknotted solid torus の twisting

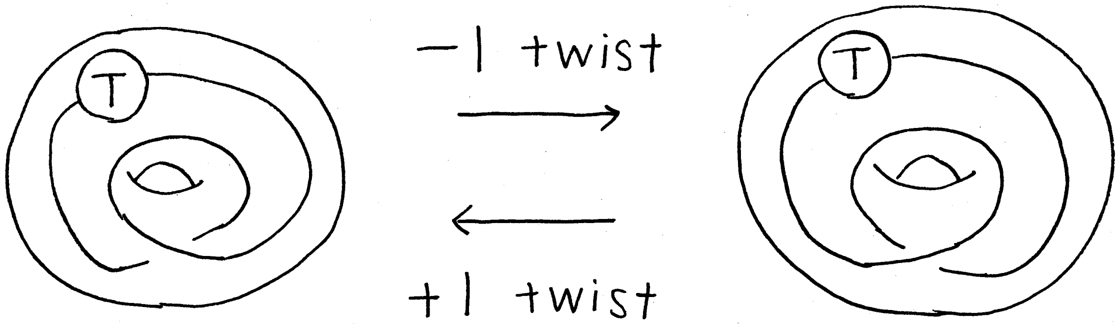
$V \subset S^3$, standard solid torus

K: V 内の結び目で $\mathrm{wrap}_V(K) \geq 2$

$f_n : V \to V$, n-twisting homeomorphism

問題. ある $n \neq 0$ に対し $K \cong f_n(K)$ (S^3 の結び目として) のとき (V,K) はどうなるか？

予想. $\mathrm{wrap}_V(K) = 2$ で，さらに以下のタイプのみ.



事実 1. [河野－渋谷－茂手木] [Mathieu] K が S^3 の trivial knot なら上の予想は正しい.

2. Litherland の signature 公式より，次の場合 K と $f_n(K)$ はコボルダント

ではない： $\mathrm{wind}_V(K) \geq 3$，または $\mathrm{wind}_V(K) = 2$ かつ $n \geq 2$.

注意.（金信） skein 多項式で考えても難しい問題. 2-comonent trivial link と同じ skein 多項式を持つ 2-component link があるか？という問題と同じことになる.

2 Unknotting operation

2.1. (中西)

unknotting operation の type を 1 つとる. 任意の amphicheiral knot K に対し, amphicheiral knot の列 $K_1, \ldots, K_n$ をとって次が成立するようにできるか ？

$$K \to K_1 \to K_2 \to \cdots \to K_n \to 0, \quad \text{各} \to \text{では unknotting operation を 2 回施す}$$

注意. K: strongly amphicheiral knot なら, 必ず上のような列はある.

2.2. (細川, 渋谷) unknotting number と #-unknotting number

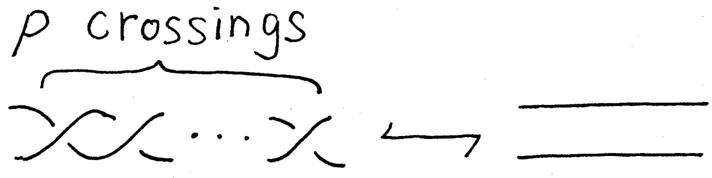
$u(K) = n$ とする. このとき変えられた n 個の crossing の内 positive crossing の数を p, negative crossing の数を q とする. p, q は n 交点の選び方に依存する. このとき $u^{\#}(K \text{の}(2,1)\text{-cable}) = n + \min|p - q|$?

注意 1. $\leq 2n$ は正しい. 等号は必ずしも成立しない, しかし $u(K) = 1$ のときは

$u^{\#}(K \text{の } (2,1)\text{-cable}) = 2$.

2. $u^{\#^p}(K \text{ の } (p,1)\text{-cable})=1$.

2.3. (中西)



は unlinking operation か？

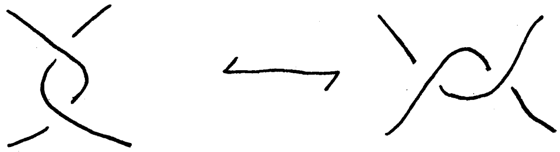
注意 1. p が偶数のときは $|p| \geq 4$ では不可能. E.g. Borromean rings は Fox's congruence mod(2,2) で trivial link にならない.

2. $p \neq 1$ かつ素数でない, とき不可能.

3．$p = 5$ などの素数でも多分不可能．$p \neq 3$ での候補：Hopf link.

4．$p = 3$ のときは（否定的に解決されている）Montesinos 予想の変形.

2.4. (中西)



は unlinking operation か？

2.5. （茂手木） mutation と unknotting number

結び目の mutation は unknotting number をかえるか？ i.e. k と k' を互いに mutant な結び目とする．このとき，$u(k) = u(k')$? $u^{\#}(k) = u^{\#}(k')$?

注意． $u^{\#}(k) \equiv u^{\#}(k') \bmod 2$

2.6. （渋谷） boundary link

事実. boundary link は self-#(I)-move を繰り返すと trivial link になる.

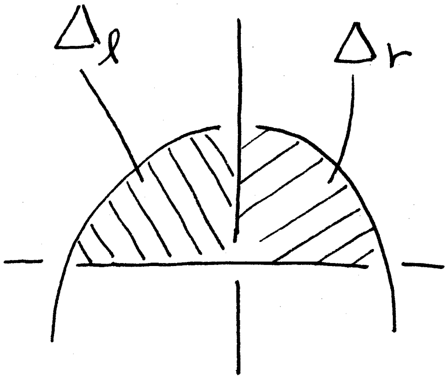
問題. $\ell = k_1 \cup \cdots \cup k_n$: Z_2-boundary link s.t. $\mathrm{lk}(k_i, k_j) = 0, i \neq j$ とすると，ℓ に self-#(I)-move を繰り返し施して trivial link にかえられるか？

注意. 2-component link については正しい.

2.7. （内田） Δ-unknotting operation (1)

事実. Δ-unknotting operation を施す箇所の up to homeo. による同値類の数は無限個.

問題. さらに次のような操作も同一視すると同値類は有限個になるか？



Δ_ℓ に施す Δ-unknotting opertion と Δ_r に施す Δ-unknotting operation を同一視する.

2.8. （内田） Δ-unknotting opertion (2)

K を $u^{\Delta}(K)=1$ の結び目とする．Δ', Δ'' を各々 K を trivial knot にかえる Δ-unknotting operation とする．このとき Δ' と Δ'' は 2.7 の列の操作で移りあうか？

3　4 次元多様体，S^4 内の曲面

3.1. （佐藤） Exotic 4-manifold

M^4 を smooth, ホモロジー 4 球面で $\pi_1(M)$ の weight=1 とする，i.e. ∃weight element $x \in \pi_1(M)$ s.t. $\pi_1(M)/<x>=1$，ここで $<*>$ は normal closure. M^4 の weight element を surgery してえられる smooth 4-manifold は，$S^2 \times S^2$ または $CP^2 \# \overline{CP^2}$ の exotic な微分構造を与えるか？特に，M^4 が,$\pi_1(\Sigma)$ の weight=1 で $\mu(\Sigma) \neq 0$ であるホモロジー 3 球面 Σ の spun ホモロジー 4 球面のときはどうか？

注意.

1. ホモロジー 3 球面 Σ を S^3 内の結び目 K （どんなものでも可）の $1/2n$-Dehn surgery で得られるものとする．Σ の spin であるホモロジー 4 球面を surgery するときに選ぶ circle として，Dehn surgery の solid torus の core をとると，得られる smooth 4-manifold は $S^2 \times S^2$ に diffeo であることがわかる．もちろん $\mu(\Sigma)=0$.

2. $\Sigma=\Sigma(2,3,5)$ の spin であるホモロジー 4 球面を surgery して exotic $S^2 \times S^2$ が得られれば，Scharlemann の例は exotic $S^3 \times S^1 \# S^2 \times S^2$ を与えることになる．

3.2. （鎌田）

以下 $m \geq 3$

F_m: $\{s_1, \ldots, s_{m-1}\}$ が生成する rank=$m-1$ の自由群.

B_m: $s_1, \ldots, s_{m-1}$ を標準的生成元とする m-braid 群,

i.e. 関係式は，$s_i s_j{}^{-1}, |i-j|>1$ と $s_i s_j s_i s_j{}^{-1} s_i{}^{-1} s_j{}^{-1}, |i-j|=1$

p : $F_n \rightarrow B_n$ は自然な射影.

事実. $\omega \in F_m$ が $p(\omega)=1$ のとき，次の操作 (1)(2)(3) を有限回繰り返して word ω を empty word にできる．

(1) $(s_i s_i{}^{-1})^{\pm 1}$ を word から除く，あるいは入れる．

(2) $[s_i, s_j]^{\pm 1}, |i-j|>1$ を word から除く，あるいは入れる．

(3) $(s_i s_j s_i s_j{}^{-1} s_i{}^{-1} s_j{}^{-1})^{\pm 1}$, $|i-j|=1$ を word から除く，あるいは入れる．

問題． $\omega \in F_n$ が $p(\omega)=1$ のとき

$\chi(\omega)=\min\{\omega$を empty word にする操作の列に現れる操作 (3) の数$\}$ を下から評価せよ．

注意 1． χ は trivial m-braid の射影図が与えられたとき，それを交点なしの射影図に変形するのに必要な， Reidemeister III move の回数の最小数とみなせる．

2． χ は 2 次元 braid $\subset D^2 \times D^2$ を 3 次元へ射影したときできる triple point の数と関係している．

以下は 3.3,3.4 で使われる記号

closed smooth 4-manifold M に対し　punc$M = M - \mathrm{int}B^4$

結び目 K が closed smooth 4-manifold M で slice とは， $K \subset \partial(\mathrm{punc}M)$ とみたとき,K が punc$M$ に埋め込まれた適当な smooth disk の境界になること．

Slice(M)= M で slice になる結び目の集合．

3.3. (安原)

予想 Slice($CP^2 \# CP^2$) に含まれない結び目がある．

注意 1． Slice($S^2 \times S^2$) = Slice($CP^2 \# \overline{CP^2}$)

= 全ての結び目

2． Slice(CP^2) に含まれない結び目は無限にある．

3． topologically locally flat category では全ての結び目は $CP^2 \# CP^2$ で slice.

3.4. (安原)

(a) 結び目 $K \subset \partial D^4$ に対し， nonorientable 4-genus $\gamma^*(K)$ を K が D^4 内で張る nonorientable smooth surface の第 1 ベッチ数の内で最小のものと定義する．

問． $\forall n, \exists K$ をとると $\gamma^*(K) \geq n$ とできるか？

(b) $K \subset \partial D^4$ とする．上の $\gamma^*(K)$ の定義で smooth を topologically locally flat に弱めて， nonorientable topologically locally flat 4-genus $\widetilde{\gamma^*}(K)$ を定義する．

根拠のない予想. $\widetilde{\gamma^*}(K) \le 2$

事実. 任意の結び目 $K \subset \partial(\mathrm{punc}CP^2)$ は topologically loclly flat な Moebius band を puncCP^2 内に張る.

問. (鎌田) 任意の K は smooth な Moebius band を puncCP^2 内に張るか？

3.5. (中西)

2-knot に対する unknotting operation を考えよ.

注意 1. 2-knot に 1-handle をいくつかつける (i.e. 1-surgery する) と unknotted surface になる. [Hosokawa-Kawauchi]

2. [Giller] による "crossing change"を繰り返すと, 2-knot は unknotted S^2 になる. ただしこの "crossing change"の結果, embedded S^2 は immersed S^2 になるかもしれない.

以下 3.6—3.8 は S^4 内の knotted torus T の群の問題; $X = S^4 - \mathrm{int}N(T)$.

3.6. (金信) <u>peripheral subgroup</u>

$Z^3 \cong \pi_1(\partial X) \to \pi_1(X)$ の image を peripheral subgroup $P(T)$ という. 任意の m, n に対して $P(T) \cong Z \oplus Z_m \oplus Z_n$ となる torus $T \subset S^4$ を構成せよ.

注意. T=(2-knot)+(1-handle) のとき $Z \oplus Z_n$ は実現できる. $P \cong Z^3$ となる例もある. [Asano] [Litherland]

3.7. (金信) $\pi_1(X)$ の center を特徴づけよ.

注意 1. T=(6-twist spun trefoil)+(1-handle) のとき center=$Z \oplus Z_n$.

2. 高次元結び目 ($S^n \subset S^{n+2}, n \ge 3$) では, 任意の有限生成アーベル群は結び目群の center になりうる. (Kervaire-Hausmann)

3.8. (金信) $\pi_1(X)$ の commutator subgroup を特徴づけよ.

注意 1. $\exists T$=(2-knot)+(1-handle) s.t.

commutator subgroup $\cong < a, b | a^p = b^q = (ab)^r = 1 >$.

ただし p, q は奇数. この条件のもとで p, q, r は自由に選べる.

E.g. $p=5, q=3, r=2$ のとき，これは５次の交代群.

2．2-knot については，結び目群の commutator の内有限群になるものは Hillman, 吉川によって決定されている.

4　3次元多様体，結び目

4.1.（西） Tangle の height

n-tangle (B,t) が height h を持つとは，任意の connected essential surface $S \subset B - \mathrm{int}N(t)$ が $-\chi(S) \geq h$ をみたすこと．任意の h に対し， height$=h$ となる tangle を目に見えるように構成せよ.

注意.

1. 抽象的には構成できる．[Kobayashi-Nishi] の Proposition 3.1 を参照．そこでの height の定義はやや異なる.

2. 目標は，任意の closed orientable 3-manifold M^3 内に g-characteristic knot K(i.e. $M^3 - \mathrm{int}N(K)$ 内の genus g 以下の incompressible surface は $\partial N(K)$ に parallel なもののみになるような結び目）を具体的に作ること.

4.2.（宮崎） Simple Loop Conjecture

F^2: closed surface, M^3: closed 3-manifold $f: F^2 \to M^3$ は 2-sided 連続写像.

問題． F 上の全ての essential *simple* loop ℓ に対しその像 $f(\ell) \subset M^3$ がやはり essential loop ならば $f_*: \pi_1(F^2) \to \pi_1(M^3)$ は単射か？

注意 1．f が埋め込みならループ定理より，答は Yes.

2．2-sided をはずせば， f が埋め込みであっても反例がある, e.g. $RP^1 \times S^1 \subset RP^2 \times S^1$.

3．M^3 が Seifert fibered space なら， minimal surface の議論により Yes [Hass]. この事実をトポロジカルに証明できないか？

4．f を曲面から曲面への 2-sided とは限らない連続写像にして同じことを考えると，答は Yes [Gabai]. 証明は初等的.

4.3. （茂手木） Dehn surgery と Seifert fibered space

事実 1．iterated torus knot の Dehn surgery でえられる Seifert fibered space は，exceptional fiber の数が 3 本以下．

2．適当な torus knot 2 つの連結和の Dehn surgery で exceptional fiber 4 本の Seifert fibered space がえられる．

問題. 結び目の Dehn surgery で exceptional fiber を 5 本以上持つ Seifert fibered space がえられるか？

4.4. （河野）

knot exterior をトーラス分解したときの hyperbolic piece になる hyperbolic manifold を特徴づけよ．あるいはその性質を調べよ．

4.5. (林) Knotted solid torus の twisting の拡張

F を S^3 の knot K の exterior に含まれる種数 ≥ 2 の closed incompressible surface とする． D を F の compressing disk で，境界を固定した D の isotopy の範囲で $\min \#(D \cap K) \geq 2$ のものとする． ∂D に沿った $1/n$-Dehn surgery で K から得られる結び目を K_n と書くと任意の $n \neq 0$ に対して $K_n \ncong K$ か?

注意. F の種数が 1 なら任意の $n \neq 0$ に対し $K_n \ncong K$ (ambient isotopic でない). [河野－渋谷－茂手木]

4.6. （宮崎） Strongly negative amphicheiral knot

事実. (1) K: negative amphicheiral knot

$\Rightarrow K$: strongly negative amphicheiral knot,

は一般には誤り． [Whitten] [Hartley]

(2) K が simple knot なら上の $\Rightarrow$ は正しい．

問題. K が satellite knot のとき， $\Rightarrow$ の成立する条件を K のコンパニオンとパタンの言葉で記述せよ．

注意. 同様の問題は， invertible $\Rightarrow$ strongly inv. についても考えられる．上の (1),(2) に対応する命題はこの場合も成立する．上の問に対応する問の答は次の通り:

[Boileau] K が次の性質 (*) を満たす invertible knot なら, K は strongly invertible:

(*) K はパタンの winding number が 0 になるような衛星型結び目表示をもたない.

4.7. (作間)

I_p: p-fold irregular simple dihedral branched covering of a knot $K \subset S^3$,

i.e. ∃表現: $\pi_1(S^3 - K) \to D_p$, 整 p 角形の対称群

meridian $\mapsto$ 折り返し

に対応する branched covering.

Σ_2: K の 2-fold branched covering

このとき, $\beta_1(\Sigma_2)-1 \le \beta_1(I_p) \le \frac{p-1}{2}(\beta_1(\Sigma_2)-1)$ か? ただし $\beta_1(X) = \dim H_1(X; Z_p)$.

注意 1. $p = 3$ の時は正しい.

2. Montesinos knot に対しては多分正しい.

3. K が 2-bridge knot のとき, 左の等号が成立.

4. Montesinos knot に対して左の等号が成立しないことがある.

4.8. (渋谷) Z_2-boundary link

(a) Z_2-boundary link の mutant は Z_2-boundary link か? (Cf. 2.6.)

注意 1. 2-component link なら正しい [Jin-Ko].

2. Z_2 をとるとまちがい [Jin-Ko].

3. mutant な link どうしは self-#(I)-move でうつりあう.

(b) ribbon link は Z_2-boundary link か?

注意. 2-component link なら正しい (Hillman).

4.9. (宮崎) 0-surgery と knot cobordism

K を oriented S^3 内の oriented knot とする. K の 0-surgery M_K は oriented 3-manifold. $H_1(M_K)$ の generator α_K は K の向きから一意に決められる. もし ∃$f : M_K \to M_L$ が向きを保つ homeo で $f_*(\alpha_K) = \alpha_L$ ならば K と L はコボルダントか?

注意１．向きに関する制約を忘れれば反例がある：

$\exists K$ s.t. K と $-K$ (K の向きを逆にしたもの) はコボルダント

でない．[Livingston].

この例は，[Kirby 問題集] の Problem 1.19(Akbulut-Kirby) への否定的解答.

２．homotopy$B^4 = B^4$ ならば K が slice のとき答は Yes.

5 その他

5.1. （河野）

仮定．K: simplicial complex (n 次元で $|K|=$ 多様体としてもよい.)

$K \triangleright L$: 細分を表す.

問１．$K \triangleright L_1, K \triangleright L_2$ のとき，L_1 から L_2 へ星状細分とその逆の列で移れるか？

注意　１．Alexander は modulo simplicial isomorphism でこれを示している.

（途中 K 等を simplicial isom. なものにとりかえてよい．）

２．$n=2$ のときは正しい.

問２．(Hudson?) $K \triangleright L_1, K \triangleright L_2$ のとき共通星状細分は存在するか？

参考文献

[Asano] K. Asano; A note on surfaces in 4-spaces, *Math. Sem. Notes*, Kobe University 4(1976), 195-198.

[Boileau] M. Boileau; Nœuds rigidement inversibles, *Low dimensional toplogy*, London Math. Soc. Lect. Note 95(1985), 1-18, Cambridge Univ. Press.

[Gabai] D. Gabai; The simple loop conjecture, *J. Diff. Geometry*, 21(1985), 143-149.

[Giller] C. Giller; Towards a classical knot theory for surfaces in R^4, *Illinois J. Math.* 26(1982), 591-631.

[Hartley] R. Hartley; Knots and involutions, *Math. Z.* 171(1980), 175-185.

[Hass] J. Hass; Minimal surfaces in manifolds with S^1 actions and the simple loop conjecture for Seifert fibered spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 99(1987), 383-388.

[Hosokawa-Kawauchi] F. Hosokawa and A. Kawauchi; Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, *Osaka J. Math.* 16(1979), 233-248.

[Jin-Ko] G. Jin and K. Ko; *Boundary links and mutation*, to appear in *Canad. Math. Bull.*

[Kirby 問題集] R. Kirby; Problems in low dimensional topology, *Algebraic and geometric topology*, Proc. Symp. Pure Math. 32(1978), 273-312, Amer. Math. Soc.

[Kobayashi-Nishi] T. Kobayashi and H. Nishi; *A necessary and sufficient condition for a 3-manifold to have genus g Heegaard splitting (A proof of Hass-Thompson conjecture)*, preprint.

[河野-渋谷-茂手木] M. Kouno, K. Motegi and T. Shibuya; Twisting and knot types, *J. Math. Soc. Japan* 44(1992), 199-216.

[Litherland] R. Litherland; The second homology of the group of a knotted surface, *Quart. J. Math.* 32(1981), 425-434.

[Livingston] C. Livingston; Knots which are not concordant to their inverses, *Quart. J. Math.* 34(1983), 323-328.

[Mathieu] Y. Mathieu; Unknotting, knotting by twists on disks and property (P) for knots in S^3, *Knots 90*, Walter de Gruyter, 1992, 93-102.

[Whitten] W. Whitten; Inverting double knots, *Pacific J. Math.* 97(1981), 209-216.